S'ENTRAINER POUR LE BAC : LES SUITES

Sujet Bac Asie 18 mai 2022 - Exercice 4

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

   a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

   b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

   c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

   b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

   a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

   b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7 p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

$P_1 = 0,3 + 0,7 P_0^2$
$= 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,363$
0,363 = proba d'obtenir au plus 1 descendance
$P_2 = 0,3 + 0,7 P_1^2$
$= 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3922383$
$0,392 \approx$ proba d'obtenir au plus 2 descendances

b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

" Au moins 11 générations " est le contraire de
" Au plus 10 générations ", c'est-à-dire
" Au plus 9 descendances ",
donc la probabilité demandée vaut :
$1 - P_9 \approx 1 - 0,428 \approx 0,572$

c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

Il semble que (P_n) soit strictement croissante et semble converger vers $\approx 0,429$

2. **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Soit la propriété $\mathcal{P}_n$: $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

Démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

▲ INITIALISATION : $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$

donc, $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie

▲ HÉRÉDITÉ : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}_k$ vraie.

Montrons qu'alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie aussi.

$\mathcal{P}_k$ vraie donc $0 \leqslant p_k \leqslant p_{k+1} \leqslant 0,5$

donc $0^2 \leqslant p_k^2 \leqslant p_{k+1}^2 \leqslant 0,5^2$

car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

donc $0,7 \times 0 \leqslant 0,7 p_k^2 \leqslant 0,7 p_{k+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,25$

donc $0 \leqslant 0 + 0,3 \leqslant p_{k+1} \leqslant p_{k+2} \leqslant \underbrace{0,175 + 0,3}_{0,475} \leqslant 0,5$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie aussi.

▲ CONCLUSION : la propriété est initialisée et héréditaire

donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

D'après a (p_n) croissante

et majorée par 5

donc (p_n) convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

On sait que (p_n) converge et

que $p_{n+1} = 0,3 + 0,7\,p_n^2$

Soit $f(x) = 0,3 + 0,7x^2$

f est continue donc la limite

L de la suite (p_n) vérifie $L = f(L)$

$\Leftrightarrow L = 0,3 + 0,7L^2$

$\Leftrightarrow 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$

b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3$

$= 1 - 0,84 = 0,16 > 0$

2 solutions :

$x_1 = \dfrac{+1 - 0,4}{1,4} = \dfrac{3}{7}$ $\quad x_2 = \dfrac{1+0,4}{1,4} = 1$

Or (p_n) majorée par 0,5 donc $L \neq x_2$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$