S'ENTRAINER POUR LE BAC : LOI BINOMIALE

Sujet Bac Métropole 12 mai 2022 – Exercice 1

Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

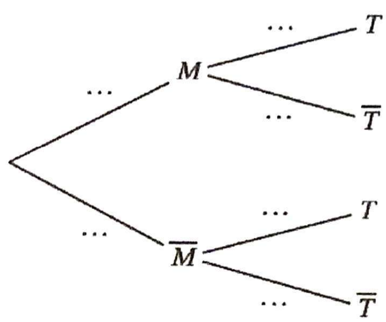
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

   b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

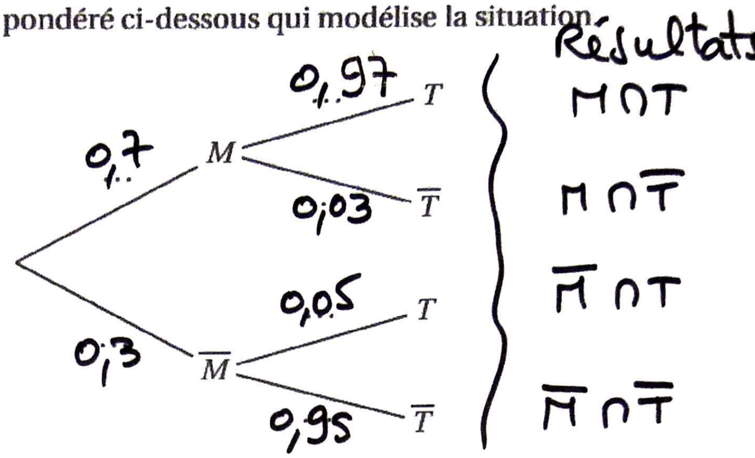
   c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?

Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

On cherche $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T)$

$= 0,7 \times 0,97 = 0,679$

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.

$p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T)$ d'après la formule des probabilités totales

$= 0,679 + 0,3 \times 005$

$= 0,679 + 0,015 = 0,694$

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

On cherche $p_T(M)$:

$p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,679}{0,694} \approx 0,978$

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

Soit l'expérience aléatoire : "capturer 5 coyotes"
On définit une épreuve de Bernoulli de succès : "test positif"
On reconnaît un schéma de Bernoulli car les 5 épreuves sont identiques, répétées et indépendantes (car assimilé à un tirage avec remise)
La variable aléatoire X qui compte le nombre de tests positifs suit donc la loi BINOMIALE de paramètres : $n = 5$ et $p = 0,694$

   b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

On cherche

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \times p^1 \times (1-p)^{5-1}$$

$$= \binom{5}{1} \times 0,694 \times 0,306^4$$

$$\approx 0,03$$

La probabilité qu'un seul ait un test positif est de 0,03.

c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Le vétérinaire affirme que $p(X \geqslant 4)$ vaut plus que $\frac{1}{2}$: a-t'il raison ?

$p(X \geqslant 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - p(X \leqslant 3)$

Or $p(X \leqslant 3) \approx 0{,}48$

donc $p(X \geqslant 4) \approx 1 - 0{,}48 \approx 0{,}52$

l'affirmation est vraie.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

On cherche n le nombre de captures tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

Or on sait que $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$

avec $p(X=0) = p(\text{"perdre } n \text{ fois"}) = 0{,}306^n$

donc $1 - 0{,}306^n \geqslant 0{,}99$

$1 - 0{,}99 \geqslant 0{,}306^n$

$0{,}01 \geqslant 0{,}306^n$

ln strictement croissante sur $]0;+\infty[$ $\left\{ \begin{array}{l} \ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}306^n) \\ \ln(0{,}01) \geqslant n \ln(0{,}306) \end{array} \right.$

Or $\ln(0{,}306) \approx -1{,}2$ donc $n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}306)} \approx 3{,}9$ donc $n = 4$