AMERIQUE DU NORD 19 mai 2022

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

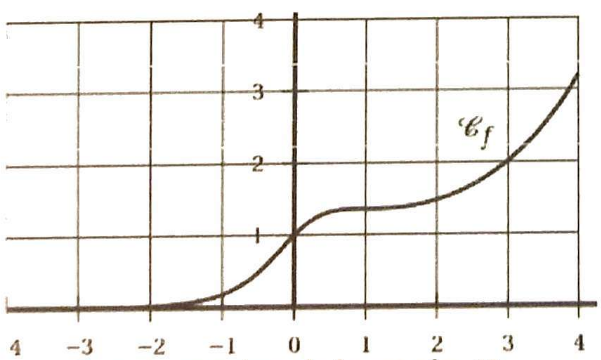
$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

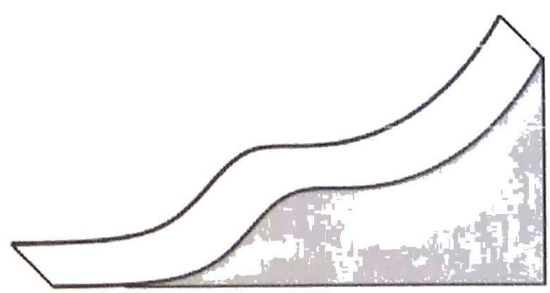
1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

Pour tout $x \in [-3;4]$, $p'(x) = 3x^2 - 3\times 2x + 5 + 0$
$= 3x^2 - 6x + 5$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times 3\times 5 = -24 < 0$ donc pas de racine réelle

donc $p'(x) > 0$ sur $[-3;4]$ donc p strictement croissante sur $[-3;4]$

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$ une unique solution qui sera notée α.

- p continue et strictement croissante sur $[-3;4]$
- $p(-3) = -68$ } 0 est une valeur intermédiaire
- $p(4) = 37$

J'applique le Corollaire du TVI : l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3;4]$

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

Par dichotomie on trouve :

$\alpha \approx -0,2$

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

x	-3		α		4
Signe de p		$-$	0	$+$	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

Pour tout $x \in [-3;4]$

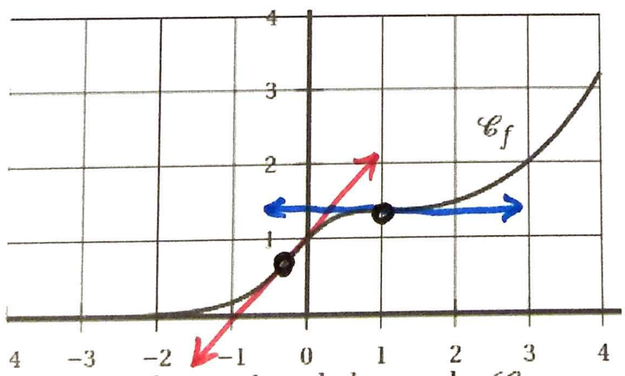
$$f'(x) = \frac{(e^x)(1+x^2) - (e^x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

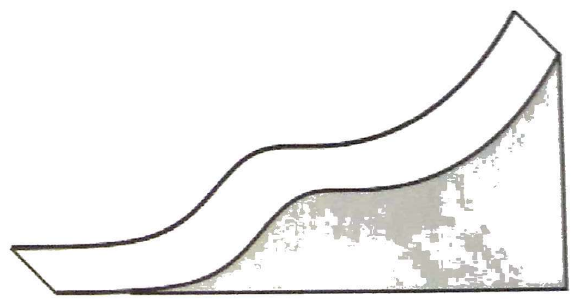
Pour $x=1$, on veut savoir si $f'(x)=0$

$$f'(1) = \frac{e^1(1+1^2-2\times 1)}{(1+1^2)^2} = \frac{e^1 \times 0}{4} = 0$$

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

La courbe $\mathscr{C}_f$ semble avoir 2 points d'inflexion (pour $x=1$ et pour $x \simeq 0{,}2$)
donc le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations? ». Justifier.

Signe de f'' :

x	-3		$\alpha \approx -0{,}2$		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(1+x^2)^3$		$+$		$+$		$+$	
Signe f''		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\uparrow$ $\uparrow$

2 points d'inflexion

donc le toboggan assure de bonnes sensations.