CENTRES ETRANGERS 11 mai 2022

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2 ; 0 ; 3),\ B(0 ; 2 ; 1),\ C(-1 ; -1 ; 2) \text{ et } D(3 ; -3 ; -1).$$

1. **Calcul d'un angle**
   - **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   - **b.** Calculer les longueurs AB et AC.
   - **c.** À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.
2. **Calcul d'une aire**
   - **a.** Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
   - **b.** Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   - **c.** En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$
   - **d.** Calculer l'aire du triangle ABC.
3. **Calcul d'un volume**
   - **a.** Soit le point $F(1 ; -1 ; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
   - **b.** Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
   - **c.** Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,0\,;\,3),\ B(0\,;\,2\,;\,1),\ C(-1\,;\,-1\,;\,2) \text{ et } D(3\,;\,-3\,;\,-1).$$

1. Calcul d'un angle

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -2 \\ y_B - y_A = 2 \\ z_B - z_A = -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

On cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} -2 = k \times (-3) \\ 2 = k \times (-1) \\ -2 = k \times (-1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = 2/3 \\ k = -2 \\ k = 2 \end{cases}$ IMPOSSIBLE donc A, B, C pas alignés.

b. Calculer les longueurs AB et AC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{12}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{11}$$

c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz' = (-2)\times(-3) + 2\times(-1) + (-2)\times(-1) = 6$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = \sqrt{12} \times \sqrt{11} \times \cos\widehat{BAC}$$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{\sqrt{12} \times \sqrt{11}} \approx 0,5222$

$$\widehat{BAC} \approx 58,5°$$

2. Calcul d'une aire

a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

$\mathscr{P}$ passe par C et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

équation cartésienne : $-2x+2y-2z+d=0$

$C(-1;-1;2)$ donc $-2\times(-1)+2\times(-1)-2\times2+d=0$

$2-2-4+d=0$

$d=4$

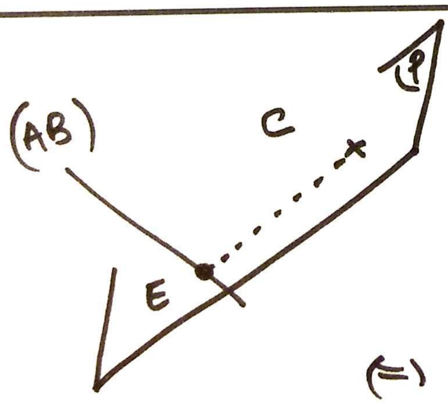
$\boxed{\mathscr{P} : -2x+2y-2z+4=0}$

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

(AB) passe par $A(2;0;3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{cases} x=2-2t \\ y=0+2t \\ z=3-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})}$$

c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$



E par définition et le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de (AB) :

$$-2(2-2t)+2(0+2t)-2(3-2t)+4=0$$

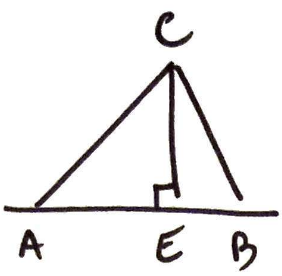
$\Leftrightarrow -4+4t+4t-6+4t+4=0$

$\Leftrightarrow 12t-6=0 \Leftrightarrow t=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x=2-2\times\frac{1}{2}=2-1=1 \\ y=0+2\times\frac{1}{2}=1 \\ z=3-2\times\frac{1}{2}=3-1=2 \end{cases}$$

$\boxed{E(1;1;2)}$

d. Calculer l'aire du triangle ABC.



$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times CE}{2}$ car $[CE]$ hauteur du triangle ABC

avec $AB = \sqrt{12}$

et $CE = \sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{8}$

donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{8}}{2} = 2\sqrt{6}$

3. Calcul d'un volume

a. Soit le point F(1 ; −1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

$\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AF}$ sont-ils coplanaires ? On cherche $k, k' \in \mathbb{R}$ tels que :

$\vec{AF} = k\vec{AB} + k'\vec{AC}$ avec $\vec{AF}\begin{pmatrix} 1-2=-1 \\ -1-0=-1 \\ 3-3=0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -1 = k\times(-2) + k'\times(-3) \\ -1 = k\times 2 + k'\times(-1) \\ 0 = k\times(-2) + k'\times(-1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -1 = -2k - 3k' \\ -1 = 2k - k' \\ 0 = -2k - k' \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = -2k - 3\times(-2k) \\ -1 = 2k - (-2k) \\ k' = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = 4k \\ -1 = 4k \\ k' = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -1/4 \\ k = -1/4 \\ k' = -2\times -1/4 = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $\vec{AF}, \vec{AB}, \vec{AC}$ coplanaires donc A, B, C, F coplanaires

b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

$\vec{FD}\begin{pmatrix} 1-3 = -2 \\ -1-(-3) = 2 \\ 3-(-1) = 4 \end{pmatrix}$ est-il orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ du plan (ABC) ?

$\vec{FD}.\vec{AB} = (-2)\times(-2) + 2\times 2 + 4\times(-2) = 4 + 4 - 8 = 0$: $\vec{FD} \perp \vec{AB}$

$\vec{FD}.\vec{AC} = (-2)\times(-3) + 2\times(-1) + 4\times(-1) = 6 - 2 - 4 = 0$: $\vec{FD} \perp \vec{AC}$

donc (FD) est orthogonale au plan (ABC)

c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

A, B, C, F coplanaires donc $F \in (ABC)$; de plus $(FD) \perp (ABC)$

Donc par définition, F projeté orthogonal de D sur (ABC)

donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{\mathcal{B}\times h}{3} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times FD}{3}$ avec $\begin{cases} \mathcal{A}_{ABC} = 2\sqrt{6} \\ FD = \sqrt{24} \end{cases}$ donc $\mathcal{V}_{ABCD} = 8$