Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

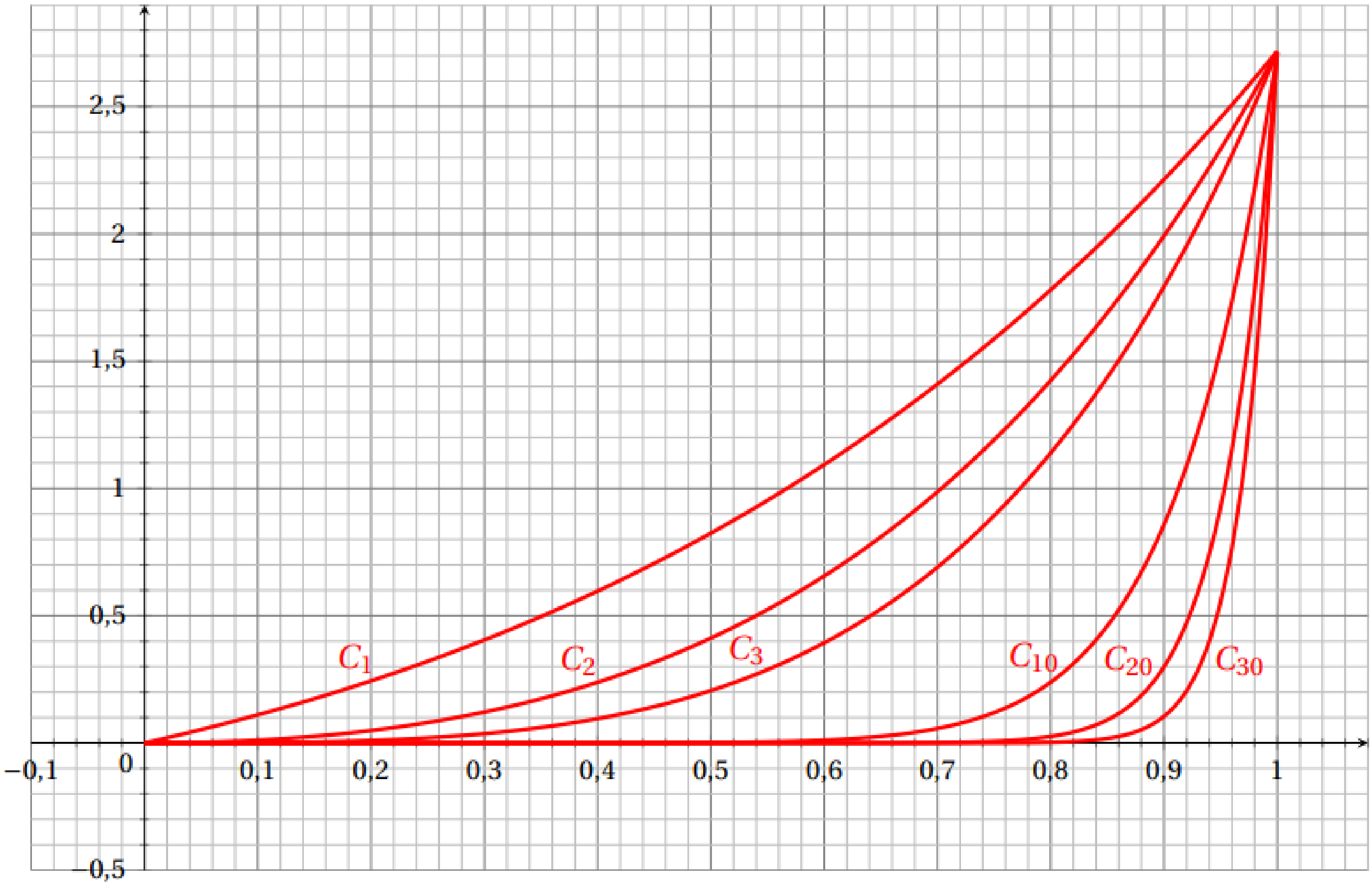
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.



Partie I

1. a. On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x.$$

Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

b. Calculer I_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n.$$

3. Calculer I_2.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x.$$

3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.