Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

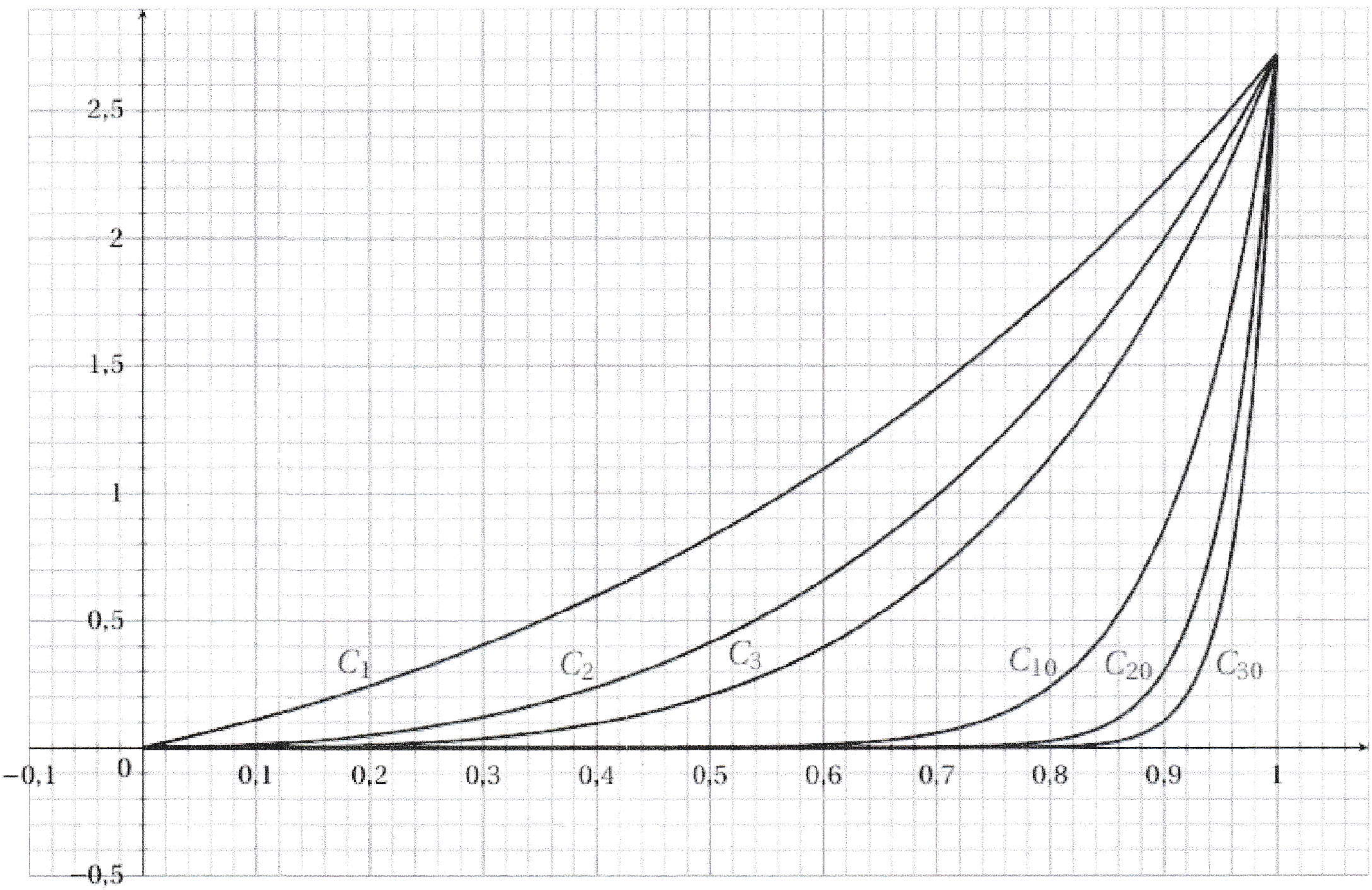
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.



Partie I

1. **a.** On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x.$$

Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

$f_1(x) = x^1 e^x = xe^x$

Pour tout $x \in [0;1]$

$F_1'(x) = (\ 1\ )e^x + (x-1)(\ e^x\ )$

$= e^x + xe^x - e^x$

$= xe^x$

$= f_1(x)$

donc F_1 une primitive sur $[0;1]$ de f_1

b. Calculer I_1.

$I_1 = \int_0^1 x^1 e^x dx = \int_0^1 f_1(x)\,dx$

$= \left[F_1(x)\right]_0^1$ car F_1 primitive de f_1

$= \left[(x-1)e^x\right]_0^1$

$= (1-1)e^1 - (0-1)e^0$

$= 0e^1 + 1e^0 = 1$

$I_1 = 1$

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$$

INTEGRATION PAR PARTIES :

$u(x) = x^{n+1}$ $\quad$ $u'(x) = (n+1)x^n$

$v'(x) = e^x$ $\quad$ $v(x) = e^x$

$$I_{n+1} = \left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x \, dx$$

$$= \underbrace{\left(1^{n+1} e^1 - 0^{n+1} e^0\right)} - (n+1) \underbrace{\int_0^1 x^n e^x \, dx}$$

$$I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

3. Calculer I_2.

$I_2 = e - 2 \times I_1$ d'après 2)

Or $I_1 = 1$ d'après 1b)

donc $I_2 = e - 2 \times 1$

$I_2 = e - 2$

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 f_n(x) dx$

Or $f_n(x) = x^n e^x \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;1]$

donc I_n représente l'aire "cachée sous la courbe $\mathcal{C}_n$"

I_n = l'aire du domaine défini par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant f_n(x) \end{cases}$$

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

Il semble que les courbes $(\mathcal{C}_n)$ se rapprochent de l'axe des abscisses donc il semble que la suite (I_n) tende vers 0

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Pour tout $x \in [0;1]$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$0 \leqslant 1 = e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1 = e \quad \text{car exp est croissante}$$

$$0 \leqslant x^n e^x \leqslant e x^n \quad \text{car } x^n \geqslant 0$$

donc $\int_0^1 0 \, dx \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n e^x dx}_{} \leqslant \int_0^1 e x^n dx$

$$0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n dx$$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc $0 \leqslant I_n \leqslant e \times \frac{1}{n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e \times \frac{1}{n+1} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$