On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} -8\ln(x) = +\infty$

Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Par comparaison des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x}$.

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$

donc $f'(x) = 2x - 8 \times \dfrac{1}{x} = 2x - \dfrac{8}{x} = \dfrac{2x^2}{x} - \dfrac{8}{x}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \boxed{\dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x}}$

4. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(x^2-4)}{x} = \dfrac{2(x+2)(x-2)}{x}$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe f'					‖	$-$	0	$+$	
Variations f					‖ $+\infty$	$\searrow$	$4-8\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 8\ln(2)$
$= 4 - 8\ln(2)$
$(\approx -1{,}55)$

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0;\ 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

Sur l'intervalle $]0;2]$:

- f est continue car somme de fonctions continues (polynôme et ln)
- f est strictement décroissante
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- $f(2) = 4 - 8\ln(2) \approx -1{,}55$

} 0 est une valeur intermédiaire

J'applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $]0;2]$

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

D'après 4)5) on obtient le tableau de variation de f avec α et β :

x	0		α		2		β		$+\infty$
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$4-8\ln(2)$ $\approx -1{,}55$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'où le signe de f sur $]0\ ;+\infty[$:

x	0		α		β		$+\infty$
Signe de f	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, Pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k = f(x) + k$$

Or, f admet pour minimum sur $]0;+\infty[$: $f(2) = 4 - 8\ln(2)$

Donc g_k admet pour minimum sur $]0;+\infty[$: $g(2) = 4-8\ln(2)+k$

Donc la plus petite valeur de k pour laquelle g_k est positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est telle que

$$4 - 8\ln(2) + k = 0$$

$$\iff \boxed{k = 8\ln(2) - 4}$$