

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- le point $A(1; -1; -1)$;
- le plan \mathcal{P}_1 , d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan \mathcal{P}_2 d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles.

2. Démontrer que \mathcal{D} est la droite d'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

3. a. Vérifier que A n'appartient pas à \mathcal{P}_1 .

b. Justifier que A n'appartient pas à \mathcal{D} .

4. Pour tout réel t , on note M le point de \mathcal{D} de coordonnées $(1 + 2t ; -t ; 3 - 2t)$.

On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2 , soit $f(t) = AM^2$.

a. Démontrer que pour tout réel t , on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

- b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3 ; -1 ; 1)$.

5. On note H le point de coordonnées $(3 ; -1 ; 1)$.

Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à \mathcal{D} .