L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- le point $A(1 ; -1 ; -1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.

$\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal : $\vec{n}_1\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$

$\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal : $\vec{n}_2\begin{pmatrix}10\\14\\3\end{pmatrix}$

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont ils colinéaires ? On cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que

$\vec{n}_2 = k\vec{n}_1 \iff \begin{cases}10 = 5k\\14 = 2k\\3 = 4k\end{cases} \iff \begin{cases}k = 10/5 = 2\\k = 14/2 = 7\\k = 3/4\end{cases}$ IMPOSSIBLE donc

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ non parallèles}}$

2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ non parallèles donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Pour $t = 0$ on obtient $\begin{cases}x = 1\\y = 0\\z = 3\end{cases}$ $B(1;0;3) \in \mathscr{D}$

Pour $t = 1$ on obtient $\begin{cases}x = 3\\y = -1\\z = 1\end{cases}$ $C(3;-1;1) \in \mathscr{D}$

B appartient-il à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$? $\begin{cases}5\times1 + 2\times0 + 4\times3 = 5+12 = 17 \text{ ok}\\10\times1 + 14\times0 + 3\times3 = 10+9 = 19 \text{ ok}\end{cases}$

C appartient-il à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$? $\begin{cases}5\times3 + 2\times(-1) + 4\times1 = 15-2+4 = 17 \text{ ok}\\10\times3 + 14\times(-1) + 3\times1 = 30-14+3 = 19 \text{ ok}\end{cases}$

donc $(BC) = \boxed{\mathscr{D} \text{ et la droite d'intersection de } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2}$

3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.

A appartient-il à $\mathscr{P}_1$?

$5\times1 + 2\times(-1) + 4\times(-1) = 5 - 2 - 4 = -1 \neq 17$

donc $\boxed{A \notin \mathscr{P}_1}$

b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 1 = 1+2t \\ -1 = -t \\ -1 = 3-2t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-1 = 2t \\ +1 = t \\ -1-3 = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2t \\ t = 1 \\ -2t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ IMPOSSIBLE}$$

donc $\boxed{A \notin \mathscr{D}}$

4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.

On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = AM^2$.

a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M - x_A = (1+2t) - 1 = 1+2t-1 = 2t \\ y_M - y_A = (-t) - (-1) = -t+1 \\ z_M - z_A = (3-2t) - (-1) = 3-2t+1 = 4-2t \end{pmatrix}$$

$$AM = \sqrt{(2t)^2 + (-t+1)^2 + (4-2t)^2}$$

donc $AM^2 = 4t^2 + (-t)^2 - 2t + 1 + 16 - 16t + (-2t)^2$

donc $AM^2 = 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + 16 - 16t + 4t^2$

$$\boxed{f(t) = 9t^2 - 18t + 17}$$

b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées (3 ; −1 ; 1).

Etude des variations de f sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 18t - 18$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe f'		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	8	$\nearrow$	

$f(1) = 9 - 18 + 17 = 8$

donc AM^2 est minimal lorsque $t = 1$

donc AM est minimal lorsque M a pour coordonnées

$\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -1 \\ z = 3 - 2 \end{cases}$ donc lorsque $\boxed{M(3 ; -1 ; 1)}$

5. On note H le point de coordonnées (3 ; −1 ; 1).

Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_A = 3 - 1 = 2 \\ y_H - y_A = -1 - (-1) = 0 \\ z_H - z_A = 1 - (-1) = 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 2 \times (-2)$

$= 4 + 0 - 4 = 0$

donc $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

donc (AH) et $\mathscr{D}$ sont orthogonales

Or $H \in \mathscr{D}$ par définition donc (AH) et ($\mathscr{D}$) sécantes

donc $\boxed{\text{(AH) et } \mathscr{D} \text{ sont perpendiculaires}}$