On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $\left(E'\right) : y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle $\left(E'\right)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$.

Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$u(x) = xe^{-x}$

$u'(x) = (1)e^{-x} + x(e^{-x} \times (-1))$

$= e^{-x} - xe^{-x}$

$u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x}$

$= e^{-x}$

donc u est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.

$y' + y = 0 \iff y' = -y$

les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$y(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

$y' = -y + e^{-x}$

les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$y(x) = Ce^{-x} + u(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$

$C \in \mathbb{R}$

4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

g solution de (E) sur $\mathbb{R}$

donc $g(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$

On cherche $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(0) = 2$

$g(0) = Ce^{-0} + 0e^{-0}$

$= C \times 1 + 0 = C = 2$

donc $g(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$