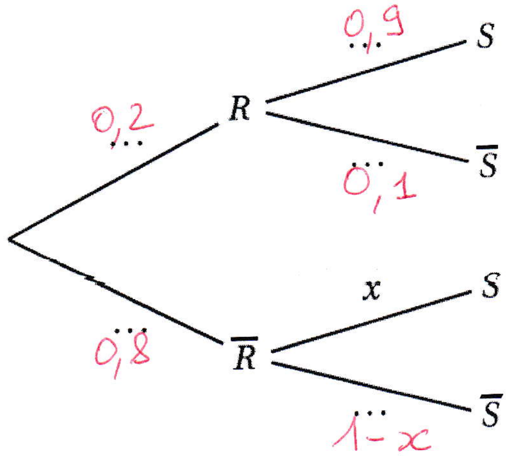
Partie A



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.

82% des clients sont satisfaits

donc $p(S) = 0,82$

Or, $p(S) = p(R \cap S) + p(\overline{R} \cap S)$

donc $0,82 = 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times x$

$\iff 0,82 = 0,18 + 0,8x$

$\iff 0,82 - 0,18 = 0,8x$

$\iff 0,64 = 0,8x$

$\iff \frac{0,64}{0,8} = x \iff \boxed{x = 0,8}$

3. On choisit un client satisfait de son achat.
Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
On arrondira le résultat à 10^{-2}.

On cherche $p_S(R) = \frac{p(R \cap S)}{p(S)}$

Or $p(R \cap S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$

et $p(S) = 0,82$ d'après l'énoncé

Donc $p_S(R) = \frac{0,18}{0,82} = \frac{9}{41} \approx 0,22$

la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS vaut $\boxed{0,22}$

Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

On reconnait un schéma de Bernoulli.
X suit la loi binomiale de paramètres
→ nombre d'épreuves : $\boxed{n = 5}$
→ probabilité du succès : $\boxed{p = 0,82}$

   b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

On cherche $p(X \leqslant 3) \approx 0,222$
la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits vaut $\boxed{0,222}$

2. Soit n un entier naturel non nul.
On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat. Démontrer que $p_n = 0,82^n$.

On reconnait un schéma de Bernoulli car les épreuves sont identiques, répétées et indépendantes (car le choix est assimilé à un tirage avec remise). Dans ce cas, la variable aléatoire X qui compte le nombre de satisfaits suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,82$

$p_n = p(X = n) = \binom{n}{n} 0,82^n \times 0,18^{n-n} = \boxed{0,82^n}$

b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n < 0,01$

$\iff 0,82^n < 0,01$

$\iff \ln(0,82^n) < \ln(0,01)$ car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff n \underbrace{\ln(0,82)}_{\approx -0,2} < \ln(0,01)$

$\iff n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)} \approx 23,2 \iff \boxed{n \geqslant 24}$

Pour obtenir moins de 1% de chance que tous les clients choisis soient satisfaits, il faut en choisir au minimum 24