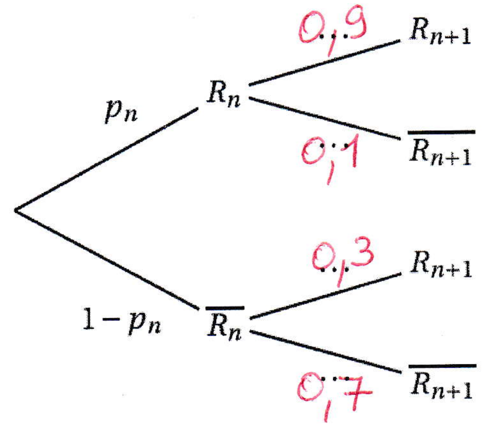
1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$$
$$= p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,3$$
$$= 0,9\,p_n + 0,3 - 0,3\,p_n$$
$$= \boxed{0,6\,p_n + 0,3}$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($u_n = p_n - 0,75$ donc $p_n = u_n + 0,75$)

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$$
$$= (0,6p_n + 0,3) - 0,75$$
$$= 0,6\,p_n - 0,45$$
$$= 0,6\,(u_n + 0,75) - 0,45$$
$$= 0,6\,u_n + \underbrace{0,6 \times 0,75}_{0,45} - 0,45$$
$$= 0,6\,u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{0,6}$ de 1° terme $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = \boxed{-0,15}$

b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n + 0,75$

avec $u_n = u_0 \times q^n$

$= -0,15 \times 0,6^n$

donc $p_n = -0,15 \times 0,6^n + 0,75$

$\boxed{p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n}$

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

$-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$

donc par opérations sur les limites :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75 - 0,15 \times 0,6^n = 0,75$

(p_n) converge vers $\boxed{\ell = 0,75}$

d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité que l'athlète réussisse à franchir les haies se stabilisera autour de $\boxed{0,75}$